государственное автономное профессиональное образовательное учреждение Самарской области «Самарский колледж сервиса производственного оборудования имени Героя Российской Федерации Е.В. Золотухина»

Комплект контрольно-оценочных средств
по учебной дисциплине
ЕН.01 **Математика**

программа подготовки специалистов среднего звена
среднего профессионального образования
по специальности **44.02.01 Дошкольное образование**

Самара, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

1. Паспорт комплекта контрольно-оценочных средств

В результате освоения учебной дисциплины Математика обучающийся должен обладать предусмотренными ФГОС по специальности СПО 44.02.01 Дошкольное образование следующими умениями, знаниями, которые формируют профессиональную компетенцию, и общими компетенциями:

уметь:

У1. применять математические методы дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных задач;
У2. применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности;
У3. использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях.
знать:
З1. основные понятия и методы математическо-логического синтеза и анализа логических устройств;
З2. решать прикладные электротехнические задачи методом комплексных чисел.

компетенции:
ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.
ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

профессиональные компетенции:
ПК 1.3. Оформлять документы, регламентирующие организацию перевозочного процесса.
ПК 2.1. Организовывать работу персонала по планированию и организации перевозочного процесса.
ПК 3.1. Организовывать работу персонала по обработке перевозочных документов и осуществлению расчетов за услуги, предоставляемые транспортными организациями.

Формой аттестации по учебной дисциплине является дифференцированный зачет.

2. Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке

2.1. В результате аттестации по учебной дисциплине осуществляется комплексная проверка следующих умений и знаний, а также динамика формирования общих компетенций:

Таблица 1.1

Результаты обучения: умения, знания и общие компетенции	**Показатели оценки результата**	**Форма контроля и оценивания**
Уметь:		
У1. применять математические методы дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных задач; ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес. ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество. ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.	- Вычисление предела функции в точке и в бесконечности - Исследование функции на непрерывность в точке - Нахождение производной функции - Нахождение производных высших порядков - Исследование функции и построение графика - Нахождение неопределенных интегралов - Вычисление определенных интегралов	Проверка самостоятельной внеаудиторной работы Тестирование
У2. применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности; ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями. ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий. ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации. ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.	- Нахождение вероятности случайного события - Составление закона распределения случайной величины - Вычисление числовых характеристик случайных величин	Проверка самостоятельной внеаудиторной работы Тестирование
У3. использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях. выполнения профессиональных	- Выполнение действий над матрицами - Вычисление определителей - Решение систем линейных уравнений методом обратной	Проверка самостоятельной внеаудиторной работы Тестирование

задач, профессионального и личностного развития. ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности. ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями. ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий. ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.	матрицы - Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера - Решение систем линейных уравнений методом Гаусса	
Знать:		
З1. основные понятия и методы математическо-логического синтеза и анализа логических устройств;	- Перечисление последовательности действий при решении систем линейных уравнений методом обратной матрицы, по формулам Крамера, методом Гаусса	Проверка самостоятельной внеаудиторной работы Тестирование
З2. решать прикладные электротехнические задачи методом комплексных чисел.	- решение прикладных задачи методом комплексных чисел в алгебраической форме	Проверка самостоятельной внеаудиторной работы Тестирование

2.2. Организация текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам усвоения программы учебной дисциплины: в форме практической работы.

2.3. Комплект материалов для оценки сформированности общих компетенций по виду деятельности с использованием практических заданий.

В состав комплекта входят задания для зачета, а также для промежуточного контроля по разделам.

3. Оценка освоения учебной дисциплины:

3.1. Формы и методы оценивания

Предметом оценки служат умения и знания, предусмотренные ФГОС по дисциплине *математика*, направленные на формирование общих и профессиональных компетенций.

При изучении учебной дисциплины предусмотрены следующие виды текущего контроля знаний обучающихся:

Устный опрос – контроль, проводимый после изучения материала в виде ответов на вопросы, позволяет не только проконтролировать знание темы урока, но и развивать навыки свободного общения, правильной устной речи;

Письменный контроль – выполнением практических заданий по отдельным темам, позволяет выявить уровень усвоения теоретического материала и умение применять полученные знания на практике;

№	**Тип (вид) задания**	**Проверяемые знания и умения**	**Критерии оценки**
1	Тесты	Знание основ математического анализа	«5» - 100 – 90% правильных ответов «4» - 89 - 80% правильных ответов «3» - 79 – 70% правильных ответов «2» - 69% и менее правильных ответов
2	Математический диктант	Знание таблиц производных, правил дифференцирования, таблицы интегралов	5» - 100 – 90% правильных ответов «4» - 89 - 80% правильных ответов «3» - 79 – 70% правильных ответов «2» - 69% и менее правильных ответов
3	Устный опрос	Знание правил нахождения пределов функции, определения производной; алгоритмов вычисления площадей криволинейных трапеций и решения дифференциальных уравнения с разделяющимися переменными	За правильный ответ ставится положительная оценка
4	Практическая работа	Умения самостоятельно выполнять практические задания	Выполнение работы (не менее 80%) – положительная оценка

5	Самостоятельная работа студентов	Знания и умения, формируемые при изучении темы. Знание правил оформления рефератов, расчетных и расчетно-графических работ.	Положительная оценка ставится при соблюдении правильности расчетов и построении графиков.

Контроль и оценка освоения учебной дисциплины по темам (разделам)

Таблица 2.2

Элемент учебной дисциплины	Формы и методы контроля			
	Текущий контроль		Промежуточная аттестация	
	Форма контроля	Проверяемые ОК, У, З	Форма контроля	Проверяемые ОК, У, З
Раздел 1. Основные понятия и методы математического анализа.			Дифференцированный зачет	У1 З 1 ОК 1-8
Тема 1.1. Дифференциальное и интегральное исчисление	Устный опрос Практическая работа №1 Практическая работа №2 Практическая работа №3 Практическая работа №4 Практическая работа №5 Практическая работа №6 Практическая работа №7 Самостоятельная работа	У1 З1 ОК 1-8		
Раздел 2. Линейная алгебра			Дифференцированный зачет	У3 З 1 ОК 5-8
Тема 2.1. Системы линейных уравнений	Устный опрос Практическая работа №8 Практическая работа №9 Практическая работа №10 Практическая работа №11 Самостоятельная работа	У3 З 1 ОК 1-8		
Раздел 3. Теория комплексных чисел				У3 З 2 ОК 1-8
Тема 3.1. Комплексные числа	Устный опрос Практическая работа №12 Практическая работа №13 Практическая работа №14 Самостоятельная работа	У3 З2 ОК 1-8		
Раздел 4. Теория вероятностей и математической статистики			Дифференцированный зачет	У1 З 1 ОК 1-8
Тема 4.1. Теория вероятностей Математическая статистика	Устный опрос Практическая работа №15 Практическая работа №16 Контрольная работа Самостоятельная работа	У2 З 1 ОК 1-8		

3.2. Типовые задания для оценки освоения учебной дисциплины

3.2.1. Типовые задания для оценки знаний

Практическая работа № 1 «Вычисления пределов. Вычисление пределов типа $[\frac{0}{0}]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$»

Цель: сформировать умение находить пределы последовательностей и пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов; сформировать умение исследовать функцию на непрерывность и наличие точек разрыва, определять род точек разрыва.

Теоретические сведения к практической работе

Пусть существует последовательность действительных чисел $\{a_n \in R : n \geq 1\}$.

Число а называется пределом последовательности

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N$$

$$\forall n > n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+6n-5}{10n^3-8n^2+2}$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+6n-5}{10n^3-8n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{6}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(10-\frac{8}{n}+\frac{2}{n^3}\right)} = \frac{1}{10}$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{12n^3+4n^2-1}$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{12n^3+4n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(12+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{0}{12} = 0$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+6}{7n-8}$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6}{7n-8} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\frac{6}{n^2})}{n^2(\frac{7}{n}-\frac{8}{n^2})} = \frac{1}{0} = \infty$$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(\sqrt{2n+8}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+8)-(n-1)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+8-n+1}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+9}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\frac{1}{0}=\infty$$

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x\to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$), если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0,$ зависящее от , такое, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon.$

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ (c=const).
2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B,$ то:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}=\frac{A}{B},\quad (B\neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Второй замечательный предел (число e = 2,718…):

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+\mathrm{x})}{x}=\log_a e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x\cdot 8}{6\cdot 8x}=\frac{5\cdot 8}{6}=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}$

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\ln(1+5x)}{5x}=5$

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}\overset{\left[1^{\infty}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5x\cdot\frac{1}{3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(5x\cdot\frac{1}{3x}\right)}=e^{\frac{5}{3}}$

Пример 8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x$

Решение

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x\overset{\left[1^{\infty}\right]}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1+3}{x^2+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^x=$$

$$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^{\frac{x^2+1}{3}\cdot\frac{3}{x^2+1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2+1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+1}}=e^0=1$$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0}f(x),$ нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x=x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x=x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения.

Если $c=\text{const},\quad c\neq 0,\quad c\neq\infty,$ то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$\frac{0}{c}\to 0;\ \ \frac{c}{0}\to\infty;\ \ \frac{\infty}{c}\to\infty;\ c\cdot\infty\to\infty;c\cdot 0\to 0;\ \ a^{\infty}\to 0,$ если $0<a<1; a^{\infty}\to\infty,$ если $a>1$.

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента
в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями;
к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right);\ \ \left(\frac{0}{0}\right);\ \ (0\cdot\infty);\ \ (\infty-\infty);\ (1^{\infty});\ (\infty^0);\ (0^0).$$

Пример 9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+15}{10x^2-4}$

Решение $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+15}{10x^2-4}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2\cdot 1^3+15}{10\cdot 1^2-4}=\frac{2+15}{10-4}=\frac{17}{6}$

Пример 10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

Решение $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(4+4)}{(4-1)}=\dfrac{8}{3}$

Пример 11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}$

Решение

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}\right)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\left(\sqrt{2x+8}\right)^2-\left(\sqrt{23-x}\right)^2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{\left((2x+8)-(23-x)\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{(2x+8-23+x)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(3x-15)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3}{\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\frac{3}{\left(\sqrt{2\cdot 5+8}+\sqrt{23-5}\right)}=\frac{3}{\left(\sqrt{18}+\sqrt{18}\right)}=\frac{3}{2\sqrt{18}}=\frac{3}{2\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1\cdot 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{4\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить пределы последовательностей:

$1)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n+5}$ $\quad 2)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-2n}{n+6}$ $\quad 3)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n+3}{1+2n}$

$4)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+16}{9n}$ $\quad 5)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$ $\quad 6)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n-1)^2-(n+1)^2}$

$7)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$ $\quad 8)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+16n}$ $\quad 9)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n-7}-\sqrt{n+2}\right)$

Задание 2. Вычислить пределы функций:

$1)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+2x^2-3x}{x^3-3x^2+x}$ $\quad 2)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+x}$ $\quad 3)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2}$

$4)\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)}{\sqrt{x}-2}$ $\quad 5)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ $\quad 6)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$

$7)\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}$ $\quad 8)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-15x^2+x}{18x^2+15x}$ $\quad 9)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{4x-7}-\sqrt{x+2}\right)}{x-2}$

Задание 3. Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы:

$1)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2}\right)^{x^2+1}$ $\quad 2)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$ $\quad 3)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

$4)\lim\limits_{x\to 0}\left(1+10x^2\right)^{x^3\cdot\frac{1}{x}}$ $\quad 5)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$ $\quad 6)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 4x}$

$7)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{tgx}$ $\quad 8)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4arctg3x}$ $\quad 9)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{\sin x\cdot x^2}$

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она: 1) определена в точке x_0; 2) имеет конечный предел при $x\to x_0$; 3) этот предел равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Функция называется непрерывной, если:

1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=0\quad \Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

2) $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad |x-x_0|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f(\mathrm{x}_0)$

Функция называется непрерывной на некотором промежутке *X*, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Пример 1: Доказать, что функция $f(\mathrm{x})=3\mathrm{x}^2-2x+1$ непрерывна на (-∞;+∞)

Решение:

$$\Delta f=\left(3\left(\mathrm{x}_0+\Delta x\right)^2-2\left(\mathrm{x}_0+\Delta x\right)+1\right)-\left(3\mathrm{x}_0{}^2-2\mathrm{x}_0+1\right)=3\mathrm{x}_0{}^2+6x_0\Delta x+3\Delta x^2-2x_0-2\Delta x+1-3\mathrm{x}_0{}^2+2\mathrm{x}_0-1=$$

$$=6x_0\Delta x+3\Delta x^2-2\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim_{\Delta x\to 0}\left(6x_0\Delta x+3\Delta x^2-2\Delta x\right)=0$$

Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если в этой точке не выполнено хотя бы одно из условий 1—3 непрерывности функции. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

Классификация точек разрыва:

1) x_0 – точка устранимого разрыва, если а) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(\mathrm{x})=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(\mathrm{x})\neq f(\mathrm{x}_0)$

   б) в точке x_0 функция не определена

2) x_0 – точка разрыва I рода, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(\mathrm{x})\neq\lim\limits_{x\to x_0+0} f(\mathrm{x})$

   $h=f(x_0+0)-f(x_0-0)$ - скачок функции

3) x_0 – точка разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует

Пример 2:

Найти точки разрыва функции и установить их тип

$$a)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \begin{cases} x^2 + 1, x < 1 \\ 0, x = 1 \\ x + 1, x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1-0} \left(x^2 + 1 \right) = 2$$

$$\lim_{x \to 1+0} \left(x + 1 \right) = 2$$

$$f(1) = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = 1 \quad \textit{точка} \quad \textit{устранимого} \quad \textit{разрыва}$$

$$б)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \begin{cases} x^2, x \le 1 \\ x - 2, x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1-0} x^2 = 1 \ne \lim_{x \to 1+0} \left(x - 2 \right) = -1$$

$$\Rightarrow x_0 = 1 \quad \textit{точка} \quad \textit{разрыва} \quad I \quad \textit{рода}$$

$$h = -1 - 1 = -2$$

$$в)\ y = 2^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\lim_{x \to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \to 1-0} 2^{\frac{1}{1-0-1}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$

$$\lim_{x \to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{\infty} = \infty$$

$$\Rightarrow x_0 = 1 \quad \textit{точка} \quad \textit{разрыва} \quad II \quad \textit{рода}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Доказать, что функция является непрерывной

$а)\ f(\mathrm{x}) = x + 9$

$б)\ f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3 + 8$

$в)\ f(\mathrm{x}) = 2\,\mathrm{x}^2 + 6x - 5$

$г)\ f(\mathrm{x}) = 10\,\mathrm{x}^2 - 12x$

Задание 2. Найти точки разрыва и установить их тип

$$а)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \begin{cases} -e^{-x}, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ e^{x}, x > 0 \end{cases}$$

$$б)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \frac{\sin x}{x}$$

$$в)\ y = f(\mathrm{x}) = e^{\frac{1}{x+3}}$$

$$г)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \frac{\cos x}{x}$$

Практическая работа № 2 «Дифференцирование функций»

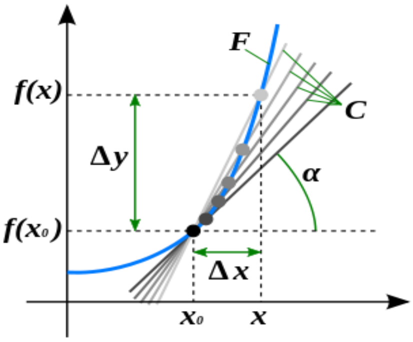
Цель: совершенствовать умения вычислять производные элементарных функций.

Теоретические сведения к практической работе

Произво́дная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).

Процесс вычисления производной называется дифференци́рованием. Обратный процесс — нахождение первообразной — интегрирование.

Иллюстрация понятия производной



Определение производной функции через предел

Пусть в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ определена функция $f\colon U(x_0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Производной функции f в точке x_0 называется предел, если он существует,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Общепринятые обозначения производной функции $y = f(x)$ в точке x_0

$$f'(x_0) = f'_x(x_0) = \mathrm{D}f(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \dot{y}(x_0).$$

Заметим, что последнее обычно обозначает производную по времени (в теоретической механике).

Таблица производных

Производные степенных функций	**Производные тригонометрических функций**	**Производные обратных тригонометрических функций**
$(c)' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^a)' = ax^{a-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования:

Операция нахождения производной называется дифференцированием. При выполнении этой операции часто приходится работать с частными, суммами, произведениями функций, а также с «функциями функций», то есть сложными функциями. Исходя из определения производной, можно вывести правила дифференцирования, облегчающие эту работу. Если *C* — постоянное число и *f=f(x), g=g(x)* — некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования:*

- $C' = 0$
- $x' = 1$
- $(f+g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(Cf)' = Cf'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ …($g \neq 0$)
- $\left(\frac{C}{g}\right)' = -\frac{Cg'}{g^2}$ ($g \neq 0$)

Пример №1. Найти производную функции $F(x) = 2x^3 - 3x^4 + 19$.

Решение.

$F'(x) = (2x^3 - 3x^4 + 19)' = (2x^3)' - (3x^4)' + (19)' = 2(x^3)' - 3(x^4)' + 0 = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 4x^3 = 6x^2 - 12x^3$

Пример №2. Найти производную функции $F(x) = x^5 - x^4 + 9$ и вычислить ее значения в точках $x = 0$ и $x = -1$

Решение.

$F'(x) = (x^5 - x^4 + 9)' = (x^5)' - (x^4)' + (9)' = 5x^4 - 4x^3$; $F'(0) = 5 \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0$; $F'(-1) = 5 \cdot (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 = 9$.

Пример №3. Найти производную функции $y = (x^2 - 1)(3x^2 + 5)$.

Решение.

$y' = \left((x^2-1)(3x^2+5)\right)' = (x^2-1)'(3x^2+5) + (x^2-1)(3x^2+5)' = 2x(3x^2+5) + 6x(x^2-1) = 2x(3x^2+5+3x^2-3) = 4x(3x^2+1)$.

Пример №4. Найти производную функции $y = \left(\frac{x^2-6}{3x+1}\right)$.

Решение.

$y' = \left(\frac{x^2-6}{3x+1}\right)' = \frac{(x^2-6)'(3x+1)-(x^2-6)(3x+1)'}{(3x+1)^2} = \frac{2x(3x+1)-3(x^2-6)}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2+2x-3x^2+18}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2+2x+18}{(3x+1)^2}$.

Содержание практической работы

1. Найдите производные следующих функций:

$y = 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3$;

$y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9$;

$y = (2x^3 - 3)(2x^3 - 1)$

2. Найдите производные следующих функций:

$y = \frac{x+5}{x-1}$;

$y = \frac{3x-7}{2x+9}$;

$y = \frac{(x-3)^2}{2x+1}$;

$y = \frac{x^3+3x^2}{3x-1}$;

$$y = \frac{3x^2 - 2x - 4}{2x - 1}$$

3. Вычислите значение производной:

$y = x^4 - 3x^2 - 2x + 1$;

$y'(0) = ?$; $y'(1) = ?$

4. Вычислите значение производной:

$y = x^5 + x^4 + 5^3$;

$y'(-1) = ?$

5. Найдите производную следующих функций:

$y = 5(3t^5 - 5t^3 + 9)^{10}$

$y = 2\sqrt{1 + 2x - x^2}$

6. Найдите производные следующих функций:

$y = e^{-x}$;

$y = e^{-x}(x^2 + 6x + 6)$

7. Найдите производные следующих функций:

$y = \ln 3x$;

$y = \log_3(4x - 2)$

8. Найдите производные следующих функций:

$y = 7\cos x - 5\sin x - 9$;

$y = 5\cos 2x$;

$y = \sin x \cos x$.

Практическая работа № 3 «Исследование функций на монотонность»

Цель: совершенствовать умения исследовать функцию.

Теоретические сведения к практической работе

Необходимые условия возрастания (убывания) функции.

Теорема. *Если дифференцируемая на некотором интервале* $(a;b)$ *функция* $y=f(x)$ *возрастает (убывает) на нем, то* $f'(x)\geq 0$ *(* $f'(x)\leq 0$ *) для всех* $x\in(a;b)$.

Доказательство. Пусть функция $y=f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$. Выберем произвольные точки x и $x+\Delta x$ на этом интервале и рассмотрим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Функция $y=f(x)$ возрастает, поэтому при $\Delta x>0$ будет $x+\Delta x>x$ и $f(x+\Delta x)>f(x)$, а при $\Delta x<0$ будет $x+\Delta x<x$ и $f(x+\Delta x)<f(x)$. В обоих случаях $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$, так как числитель и знаменатель дроби будут иметь одинаковые знаки. Следовательно, $y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$.

Аналогично рассматривается случай, когда функция $y=f(x)$ убывает наинтервале $(a;b)$.

Замечание 1. *Геометрически теорема означает, что касательные к графику возрастающей функции имеют острые углы с положительным направлением оси* Ox*, а убывающие – тупые.*

Достаточные условия возрастания (убывания) функции.

Теорема. *Если функция* $y=f(x)$ *дифференцируема на интервале* $(a;b)$ и $f'(x)>0$ *(* $f'(x)<0$ *) для всех* $x\in(a;b)$*, то функция* $y=f(x)$ *возрастает (убывает) на этом интервале.*

Доказательство. Пусть $f'(x)>0$ на интервале $(a;b)$. Возьмем точки $x_2>x_1$. Применим к отрезку $[x_1;x_2]$ теорему Лагранжа $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)$, где $c\in[x_1;x_2]$. Так как $f'(c)>0$ и $x_2-x_1>0$, то $f(x_2)-f(x_1)>0$ и $f(x_2)>f(x_1)$. Следовательно, функция $y=f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$.

Максимум и минимум функции.

Точка x_0 называется *точкой максимума (минимума) функции* $y=f(x)$, если существует такая ε – окрестность точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$) (рис. 64).

Значение функции в точке максимума (минимума) называется ее *максимумом (минимумом)*.

Максимум и минимум функции называются ее *экстремумами*.

Точки, в которых производная функции не существует или равна нулю, называют *критическими*.

Необходимое условие экстремума.

Теорема. *Если дифференцируемая функция* $y=f(x)$ *имеет экстремум в точке* x_0*, то ее производная в этой точке равна нулю,* $f'(x_0)=0$.

Доказательство. Пусть x_0 – точка максимума. Следовательно, в окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$.

Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0,$ если $\Delta x > 0$ и

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0,$

Если $\Delta x < 0$. По условию теоремы производная функции $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

существует. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $f'(x_0) \ge 0$, если $\Delta x < 0$ и $f'(x_0) \le 0$, если $\Delta x > 0$. Это возможно лишь в случае $f'(x_0) = 0$.

Аналогично можно показать утверждение теоремы если x_0 – точка минимума.

Замечание 1. *Геометрически утверждение теоремы означает, что в точках экстремума касательные к графику функции параллельны оси* Ox. Обратная теорема не верна. Если $f'(x_0) = 0$, то это не всегда означает, что точка x_0 – точка экстремума. Действительно, для функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 0$ производная $y' = 3x^2$, $y'(0) = 0$, но точка O не является ни минимумом, ни максимумом. Существуют так же функции, которые в точках экстремума не имеют производных. Так функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ не имеет производной, но эта точка является ее минимумом.

Достаточное условие экстремума.

Теорема. *Если непрерывная функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в некоторой* δ – *окрестности критической точки* x_0 *и при переходе через нее (слева направо) производная* $f'(x)$ *меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то точка* x_0 *есть точка максимума (минимума).*

Доказательство. Рассмотрим δ – окрестность точки x_0. Пусть выполняется условия: $f'(x) > 0$, для любого $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) < 0$, для любого $x \in (x_0; x_0 + \delta)$. Тогда функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $(x_0 - \delta; x_0)$ и убывает на интервале $(x_0; x_0 + \delta)$. Следовательно, значение функции $y = f(x)$ в точке x_0 является наибольшим значением на интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, т. е. $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Это означает, что x_0 – точка максимума. Аналогично доказывается случай для точки минимума.

Теорема. *Если в точке* x_0 *первая производная функции равна нулю* $f'(x_0) = 0$, *а вторая производная в точке* x_0 *существует и отлична от нуля* $f''(x_0) \ne 0$, *то при* $f''(x_0) < 0$ *в точке* x_0 *функция* $y = f(x)$ *имеет максимум, а при* $f''(x_0) > 0$ *– минимум.*

Доказательство. Пусть $f''(x_0) > 0$. Так как

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0,$$

то в достаточно малой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0.$$

Если $\Delta x < 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) < 0$, а если $\Delta x > 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) > 0$.

Таким образом, при переходе через точку x_0 первая производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, по теореме 35 достаточных условий экстремума, точка x_0 есть точка минимума. Аналогично доказывается случай для точки максимума.

Пример 1. Исследовать монотонность функции

$y=\frac{x-1}{x^2+8}$ и найти ее точки экстремума.

Решение. Найдем производную функции и приравняем ее к нулю

$$y'=\frac{(x-1)'\cdot(x^2+8)-(x-1)\cdot(x^2+8)'}{(x^2+8)^2}=\frac{x^2+8-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\text{¿}$$

$$\text{¿}\frac{x^2+8-2x^2+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+8}{(x^2+1)^2}=0.$$

Отсюда: $-x^2+2x+8=0,\, x_1=-4,\, x_2=2$. Построим числовую ось и на ней отметим методом интервалов знаки производной. Там, где производная меняет знак с (+) на (-), будет точка максимума (max), где с (-) на (+) – точка минимума (min). Из рисунка видно, что минимум достигается в точке $x=-4$, максимум - в точке $x=2$, причем

$$y_{min}=\frac{-4-1}{16+8}=\frac{-5}{24},\; y_{max}=\frac{2-1}{4+8}=\frac{1}{12}.$$

Функция убывает на интервалах $(-\infty;-4)$ и $(2;+\infty)$, возрастает на интервале $(-4;2)$.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Такая функция достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений. Эти значения она может принимать либо во внутренней точке x_0 отрезка $[a;b]$, либо на границе отрезка, т. е. в точках a и b.

Если $x_0 \in [a;b]$, то наибольшее и наименьшее значения следует искать среди критических точек функции $y=f(x)$.

Таким образом, можно сформулировать следующее правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

1) найти критические точки функции на интервале $(a;b)$;
2) вычислить значения функции в найденных точках;
3) вычислить значения функции на концах отрезка, т. е. в точках $x=a$ и $x=b$;
4) среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечание 1. Если функция $y=f(x)$ имеет лишь одну критическую точку и она является точкой максимума (минимума), то в этой точке функция принимает свое наибольшее (наименьшее) значение.

Замечание 2. Если функция $y=f(x)$ не имеет на отрезке $[a;b]$ критических точек, то на нем функция либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает. Свои наибольшее и наименьшее значения функция принимает в этом случае на концах отрезка.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$y=3x^5-100x^3+960x-150$

на отрезке $[-3:3]$.

Решение. Найдем производную функции и приравняем ее к нулю

$y'=15x^4-300x^2+960=0,\, x^4-20x^2+64=0.$

Откуда $x_1=-4,\, x_2=-2,\, x_3=2,\, x_4=4$. Точки x_1 и x_4 не лежат на отрезке $[-3:3]$, поэтому находим значения функции в точках x_2, x_3 и на границе отрезка - в точках $x=-3$ и $x=3$:

$y(-3)=3(-3)^5-100(-3)^3+960(-3)-150=-3659;$
$y(-2)=3(-2)^5-100(-2)^3+960(-2)-150=-2966;$
$y(2)=3\cdot 2^5-100\cdot 2^3+960\cdot 2-150=1066;$
$y(3)=3\cdot 3^5-100\cdot 3^3+960\cdot 3-150=759.$

Выбираем наименьшее и наибольшее из этих значений.

Ответ: $y_{наим.}=-3659,\ при\ x=-3,\ y_{наиб.}=1066,\ при\ x=2$.

Практическая работа № 4 «Исследование функции при помощи производной»

Цель: исследовать функцию с помощью производной и построить график.

Теоретические сведения к практической работе

Теорема Ролля.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале (a;b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a)=f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c\in$(a;b), в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c)=0$.

Теорема Коши.

Если функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале (a;b), причем $\varphi'(x)\neq 0$ для $x\in$ (a;b) то найдется хотя бы одна точка $c\in$(a;b) такая, что выполняется равенство $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Теорема Лагранжа. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале (a;b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a)=f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c\in$(a;b) такая, что выполняется равенство $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Следствие 1 Если производная некоторой функции на промежутке равна нулю, то функция постоянна на этом промежутке.

Следствие 2 Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Возрастание и убывание функций

Теорема 1. (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале (a;b) функция $y=f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ для любого $x\in(a;b)$.

Теорема 2. (достаточные условия). Если функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале (a;b) и $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ для любого $x\in(a;b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a;b).

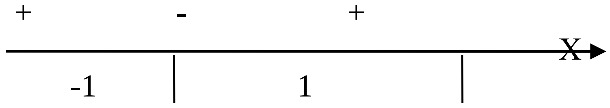
Теоремы 1 и 2 позволяют довольно просто исследовать функцию на монотонность (функция, убывающая или возрастающая, называется монотонной).

Пример. Исследовать функцию $f(x)$ $=x^3-3x-4$ на монотонность.

Решение:

$x \in R = (-\infty;+\infty)$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)\times(x+1)$



$f'(x) \geq 0$ при $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$

$f'(x) \leq 0$ при $x \in [-1;1]$

Ответ: данная функция возрастает при $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$ и убывает $x \in [-1;1]$

Максимум и минимум функций

Теорема (необходимое условие). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f(x)$=0.

Теорема (достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева на право) производная $f^{'}(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума, с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума.

Удобно использовать другой достаточный признак существования экстремума основанный на определении знака второй производной.

Теорема. Если в точке x_0 первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю $(f'(x) = 0)$, а вторая производная в точке x_0 существует и отличная от нуля $(f''(x) \neq 0)$, то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум и минимум - при $f''(x_0) > 0$.

Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется точкой перегиба.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала (a;b) имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх.

Если же $f''(x) > 0$ для любого $x \in (a;b)$ - график выпуклый вниз.

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Асимптоты графика функции

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Асимптоты бывают вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Прямая x=a является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Если существует наклонная асимптота y=Rx+b, то R и b находится по формуле: $R=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-Rx)$.

Если R=0, то y=b- уравнение горизонтальной асимптоты.

Общая схема исследования функции и построения графика функции

Исследование функции целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f(x)$>0 или $f(x)$<0).
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Найти интервалы монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

Пример. Исследовать функцию $y=\frac{x}{1-x^2}$ и построить ее график.

1. $x\in(-\infty;-1),(-1;1),(1+\infty)$
2. $x=0, y(0)=0$

Точка (0;0)- точка пересечения графика с осями ОХ и ОУ.

3. Функция знакоположительна (y>0) в интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$, знакоотрицательна – в $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$

4. Функция $y=\frac{x}{1-x^2}$ является нечетной т.к. $y(-x)=\frac{-x}{1-(-x)^2}=-\frac{x}{1-x^2}=-y(x)$.

Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при $x\geq 0$.

5. Прямые x = 1 и x = -1 являются ее вертикальными асимптотами.

Выясним наличие наклонной асимптоты.

$$R=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{1-x^2}-0\times x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x^2}=0$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота ее уравнение y=0. Наклонных асимптот нет.

Прямая y=0 является асимптотой и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$.

6. $y'=(\frac{x}{1-x^2})'=\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$.

Так как y’>0 в области определения, то функции является возрастающей на каждом интервале области определения.

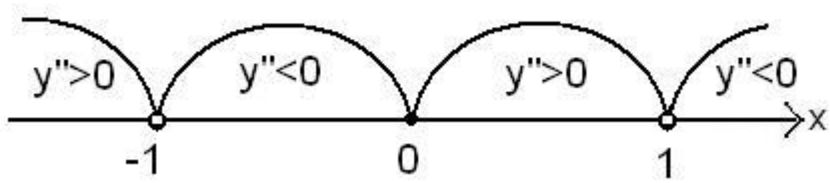
7. Т.к. $y'=\frac{x^2+1}{(1+x^2)^2}$, то критическими точками является точки

x_1 = -1 и x_2 = 1.

Данные точки не принадлежат области определения функции, значит, функция экстремумов не имеет.

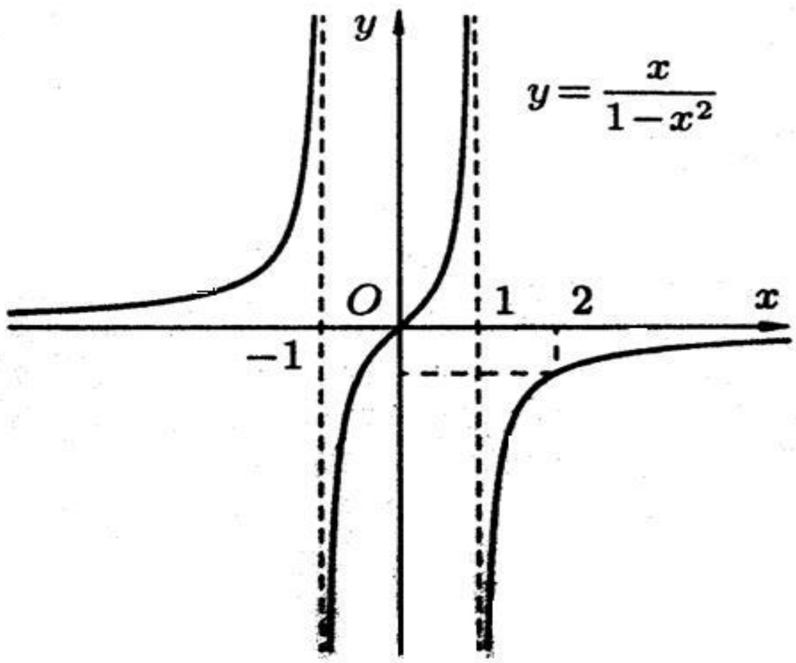
8. Найдем y”

$$y'' = \left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$



Точка (0;0) – точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$; выпуклый вниз на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$



Содержание практической работы

Вариант №1

1. y = $x^3 - 3x^2 + 4$
2. y = $\frac{5-2x}{x^2-4}$

Вариант №2

1. y = $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$
2. y = $\frac{x}{x^2-1}$

Вариант №3

1. y = $-x^3 + 3x^2 - 2$
2. y = $\frac{x^2}{x^2-1}$

Вариант №4

1. y = $-x^3 + 3x^2 - 2$
2. y = $\frac{x^3}{x^2-1}$

Вариант №5

1. y = $x^3 - 12x + 6$
2. y = $\frac{2x}{x^2+1}$

Вариант №6

1. y = $x^3 - 12x^2$-9x+1
2. y = $\frac{1}{x^2+1}$

Вариант №7

1. y= $x^3 - 6x^2 + 9x - 3$
2. y = $\frac{2x}{x^2+1}$

Вариант №8

1. y = $x^3 - 12x^2$-9x+1
2. y = $\frac{x^2}{x^2+1}$

Вариант №9

1. y = $x^3+9x^2+24x+12$
2. y = $\frac{x^2}{6x+18}$

Вариант №10

1. y=$\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$-2x-2
2. y=$\frac{1}{3}\frac{x^2}{x-2}$

Практическая работа № 5,6 «Интегрирование различными методами. Вычисление определенных интегралов»

Цель: совершенствовать умения находить неопределенные интегралы и вычислять определенные интегралы.

Теоретические сведения к практической работе

Основные свойства неопределенного интеграла

$1^0 \ (\int f(x)dx)' = f(x)$; $\quad 2^0 \ d\int f(x)dx = f(x)dx$;

$3^0 \int dx(x) = F(x)+c$; $\quad 4^0 \int kf(x)dx = k\int(x)dx$;

$5^0 \int [f(x)\pm g(x)] = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

12.2. Таблица основных интегралов.

$1. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c, (\alpha\ne -1),$ в частности, $\int du = u+c;$

$2. \int \frac{du}{u} = \ln|u|+c;$ $3. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}+c;$ $4. \int e^u du = e^u+c;$ $5. \int \sin u du = -\cos u + c;$

$6. \int \cos u du = \sin u + c;$ $7. \int tgu du = -\ln|\cos u| + c;$ $8. \int ctgu du = \ln|\sin u| + c;$

$9. \int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + c;$ $10. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c;$ $11. \int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + c;$

$12. \int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4})\right| + c;$ $13. \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c;$

$14. \int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + c;$ $15. \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a} + c;$

$16. \int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c;$ $17 \int \sqrt{a^2-u^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + c;$

$18. \int \sqrt{u^2\pm a^2}du = \frac{u}{2}\times\sqrt{u^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right| + c.$

Основные методы интегрирования

Метод непосредственного интегрирования

Определение. Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интегрирования приводится к одному или нескольким табличным интегралом, называется непосредственном интегрированием.

Примеры:

1) $\int \frac{d(x)}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + c$

2) $\int\left(4x^3 - \frac{5}{\cos^2 2x} + 3^{1-x}\right)d(x) = 4\int x^3 dx - \frac{5}{2}\int \frac{d(2x)}{\cos^2 2x} - \int 3^{1-x} d(1-x) =$

$x^4 - \frac{5}{2} tgx - \frac{3^{1-x}}{\ln 3} + c$

Метод интегрирования подстановкой

Метод подстановки (или замены переменной) заключается в том, что заменяют x на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx = \varphi'(t)$ и получают

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt .$$

Примеры:

1) $\int \cos 3x dx = \left| \begin{matrix} 3x = t & 3dx = dt \\ (3x)'dx = dt; & dx = \frac{1}{3}dt \end{matrix} \right| = \int \cos t \times \frac{1}{3}\sin t + c = \frac{1}{3}\sin 3x + c$

2) $\int \sin(7x+8)dx = \left| \begin{matrix} 7x+8 = t & dx = \frac{1}{7}dt \\ 7dx = dt; & \end{matrix} \right| = \int \sin t \times \frac{1}{7}dt \Big| = -\frac{1}{7}\cos t + c = -\frac{1}{7}\cos(7x+8) + c$

3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} 1-x^2 = t & dx = -\frac{dt}{2x}dt \\ -2xdx = dt; & \end{matrix} \right| = -\int \frac{\cancel{x}dt}{\sqrt{t} \times 2\cancel{x}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2} \times \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c =$

$= -\frac{1}{2} \times 2 \times t^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$

4) $\int (15-3x)^7 dx = \left| \begin{matrix} 15-3x = t & dx = -\frac{1}{3}dt \\ -3dx = dt; & \end{matrix} \right| = \int t^7 \times (-\frac{1}{3})dt = -\frac{1}{3} \times \frac{t^8}{8} + c = -\frac{(15-3x)^8}{24} + c$

13.3. Метод интегрирования по частям

$$\boxed{\int u d\upsilon = u \times \upsilon - \int \upsilon du}$$

Вид интеграла	Подстановка

$\int P(x)arctgxdx; \int P(x)arcctgxdx; \int P(x)\ln xdx;$ $\int P(x)\arcsin xdx; \int P(x)\arccos xdx; P(x)$ - многочлен.	$u = arctgx$ $u = arcctgx$ $u = \ln x$ $u = \arcsin x$ $u = \arccos x$ $d\upsilon = P(x)dx$ $\upsilon = [первообразная P(x)]$
$\int P(x)e^{kx}; \int P(x)\sin kxdx; \int P(x)\cos kxdx,$ $k - некоторое\ \ число$ *P(x) – многочлен.*	$u = P(x)$ $d\upsilon = e^{kx}dx$ $\upsilon = [первообразная E^{kx}]$ $d\upsilon = \sin kxdx$ $\upsilon = [первообразная \cos kx]$
$\int e^{ax}\cos bxdx; \int e^{ax}\sin bxdx$ *a и b некоторые числа.*	*Двукратное интегрирование* *Например:* $\int e^x \cos xdx = \left\| \begin{matrix} u = e^x & dx = \cos xdx \\ du = e^x dx & ;\ \upsilon = \sin x \end{matrix} \right\| =$ $= e^x \sin x - \int e^x \sin xdx = \left\| \begin{matrix} u = e^x & d\upsilon = \sin xdx \\ du = e^x dx & ;\ \upsilon = -\cos x \end{matrix} \right\| =$ $= e^x \sin x - (-e^x \cos + \int e^x \cos xdx)$. $\int e^x \cos xdx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c$.

Примеры:

1) $\int \ln xdx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix} \right| = x \times \ln x - \int x \times \frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c$

2) $\int (2x+1)e^{3x} d(x) = \left| \begin{matrix} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| =$

$= (2x+1) \times \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\, 2xdx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + c$

Содержание практической работы

№ 1Вычислить определенный интегралы:

Вариант 1 **Вариант 2**

1. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$	1. $\int_1^2 e^x dx$
2. $\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx$	2. $\int_0^2 \left(3x^2 - 1\right)dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$	3. $\int_0^{\pi} \sin x dx$
4. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	4. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

№2. Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

Вариант 1	**Вариант 2**
1. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$	1. $\int \left(x^4 + \sqrt[5]{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)dx$
2. $\int e^x \left(2 - \frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx$	2. $\int (\sin x + 5\cos x)dx$
3. $\int (2^x + 3^x)dx$	3. $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$
4. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$	4. $\int ctg^2 x dx$

№3. Пользуясь методом подстановки вычислить интегралы:

Вариант 1	**Вариант 2**
1. $\int \cos 5x dx$	1. $\int \sin 7x dx$
2. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx$	2. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
3. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$	3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$
4. $\int \frac{e^{4x}}{e^x - 1} dx$	4. $\int e^{\sin x} \cos x dx$

№4. С помощью метода интегрирования по частям вычислить интегралы:

Вариант 1	**Вариант 2**
1. $\int \left(4x^3 + 6x - 7\right)\ln x dx$	1. $\int \left(x^2 + 3x + 2\right)\ln x dx$
2. $\int x \ln x dx$	2. $\int x \ln\left(3x + 2\right)dx$
3. $\int x e^{-x} dx$	3. $\int x e^{5x} dx$
4. $\int \arcsin x dx$	4. $\int \cos\left(\ln x\right)dx$

Практическая работа № 7 «Площадь криволинейной трапеции»

Цель: сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления площадей.

Теоретические сведения к практической работе

Площади плоских фигур

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \ge f_1(x)$ для всех $x \in [a,b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \qquad (8)$$

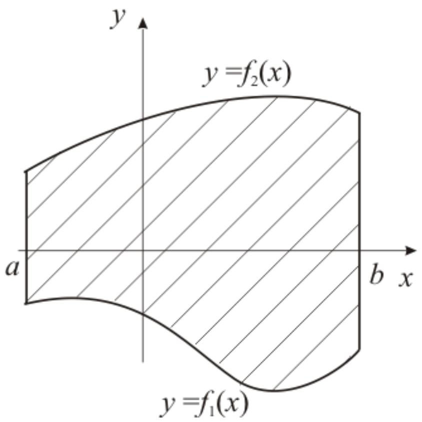


Рис. 1

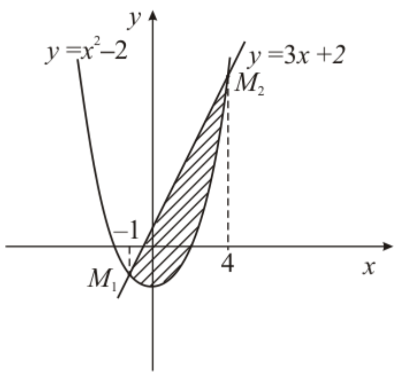


Рис. 2

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 - 2,\ y = 3x + 2.$

*Решение***.** Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0,\ 2)$ и $(-1,\ -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3\cdot(-1) + 2 = -1, \ y_2 = 3\cdot 4 + 2 = 14.$ Итак, $M_1(-1,-1), \ M_2(4,14).$

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой $f_2(x) = 3x + 2, \ f_1(x) = x^2 - 2,$ поскольку $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [-1,4]$. Получим:

$$S = \int_{-1}^{4}\left(3x + 2 - \left(x^2 - 2\right)\right)dx = \int_{-1}^{4}\left(3x - x^2 + 4\right)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{3\cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4\cdot 4 - \left(\frac{3\cdot(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4\cdot(-1)\right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 =$$

$$= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}\ (\text{кв.ед.})$$

2. Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

Если функции $y = y(t)$ и $x = x(t)$ имеют непрерывные производные первого порядка для всех $t \in [t_0, t_1]$, то площадь плоской фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [t_0, t_1]$, прямыми $x = a$, $x = b$, где $a =$

$x(t_0)$,

$b = x(t_1)$, и осью OX, вычисляется по формуле:

$$S = \left|\int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt\right|. \qquad (9)$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически:

$x = 2\cos t, \ y = 3\sin t, \ 0 \leq t \leq 2\pi.$

Решение. Для построения фигуры составим таблицу значений координат (x, y) точек кривой, соответствующих различным значениям параметра t, $0 \le t \le 2\pi$.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	2	0	–2	0	2
y	0	3	0	–3	0

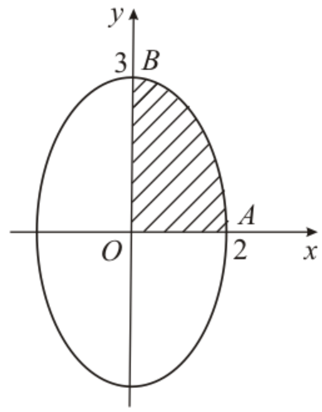


Рис. 3

Нанесем точки (x, y) на координатную плоскость XOY и соединим плавной линией. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π, соответствующая точка (x, y) описывает эллипс (известно, что $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$ — параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями a и b). Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей OX и OY, найдем её площадь S, умножив на 4 площадь криволинейной трапеции AOB. Согласно формуле (9) получим:

$$S = 4\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t\,(2\cos t)'\,dt\right| = 4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt\right| = \left\{\begin{matrix} \text{используем формулу} \\ \text{понижения степени} \\ \text{для } \sin^2\alpha \text{ из таблицы 2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= 4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt\right| = 4\left|-3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\,dt\right| = 4\left|-3\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right| =$$

$$= 4\left|-3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0\right)\right)\right| = 4\left|-3\frac{\pi}{2}\right| = 6\pi \approx 18{,}850 \ (\text{кв. ед.}).$$

Содержание практической работы

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y = x^2 - 2,\ y = 1 - 2x$

2) $y = x^3,\quad y = 8,\quad x = 0$

3) $y = 3x^2 + 1,\quad y = 3x + 6$

4) $y = x^2,\ y = x + 1$

5) $y = x^2, \quad y = 2 - x^2$

6) $y = x^2 - 1, \quad y = 1 - x$

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически.

1) $x = 2t - t^2, \quad y = t(t-1), \quad 0 \le t \le 1$

2) $x = t^2 - 1, \quad y = t^3 - t, \quad 0 \le t \le 1$

3) $x = 2\sin t, \quad y = \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

4) $x = \ln t, \quad y = (t-1)(3-t), \quad 1 \le t \le 3$

5) $x = 1 - \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

6) $x = \cos t, \quad y = 1 - \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

Практическая работа № 8 «Производить операции над матрицами»

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с матрицами, находить определители матриц.

Теоретические сведения к практической работе

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись « матрица B имеет размер mxn» означает, что речь идет о матрице, состоящей из m строк и n столбцов. Например, матрица $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет размер *2*x*3*. Далее, b_{ij} - обозначение элемента, стоящего на пересечении i-й строки и j-го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

При ссылке на i-*ю* строку матрицы A используют обозначение A_i, при ссылке на j-*й* столбец – обозначение A^j.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы a_{11} , a_{22} ,…, a_{nn} квадратной матрицы A (размера nxn) образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной.* Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера *3*x*3*

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

матрица A является верхней треугольной, B – диагональной, C – нижней треугольной, E – единичной.

Матрицы A, B называются *равными* ($A=B$), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы *умножить матрицу А на отличное от нуля вещественное число k,* необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *сумму матриц А, В* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2n}+b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & ... & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Найти *2A-B*, если $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу *A* на число «2», затем матрицу *B* на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A-B=2\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Имеем: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=$

$$=2(-1\cdot 0-2\cdot 5)+3(4\cdot 0-2\cdot 3)-1(4\cdot 5-(-1)\cdot 3)=-20-18-23=-61.$$

Произведение AB можно определить только для матриц *A* размера *m*x*n* и *B* размера *n*x*p*, при этом *AB*=*C*, матрица *C* имеет размер *m*x*p*, и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы *A* на *j-й* столбец матрицы *B:* $c_{ij}=A_iB^j=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}$ *(i=1,2,…,m; j=1,2,…,p).* Фактически необходимо каждую строку матрицы *A* (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы *B* (стоящей справа).

Пример 2. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Размер матрицы *A* 3x2, матрицы *B* 2x2. Поэтому произведение *AB* найти можно, произведение *BA* – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2;4) \\ (0;4)(1;3) & (0,4)(-2;4) \\ (2;1)(1;3) & (2;1)(-2;4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+3 & 2+4 \\ 0+12 & 0+16 \\ 2+3 & -4+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицей, *транспонированной* к матрице *A* размера *m*x*n*, называется матрица A^T размера *n*x*m*, строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если $C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}$, то $C^T=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 12 & 16\\ 5 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 4 & 7\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 16\\ 20 & 30\\ 17 & 6\end{pmatrix}.$$

Матрицы А, В называются *эквивалентными*, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

Рангом матрицы *А* в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение *r(A)*. Так, в рассмотренном выше примере 3.4 *r(A)=3*, *r(B)=2*. Можно доказать, что ранг матрицы *А* (размера *m*x*n*) не может быть больше $\min\{m,n\}$ (например, для матрицы *А* размера *2*x*3* $r(A)\le 2$). Кроме того, ранг матрицы не зависит ни от выбора ведущих элементов, ни от проводимых преобразований. Это свойство можно использовать при проверке. Так, в примере 3.4 после перестановки первой и второй строки в матрице *В* можно в качестве ведущего сначала рассмотреть элемент b_{12}, а затем вычеркнуть третью строку, пропорциональную второй ($C_3=-C_2$):

$$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4 & 9\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 1 & 9 & 2 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 4 & 9\\ 1 & 9 & 2 & 6\end{pmatrix}\to$$

$$\xrightarrow{C_3=C_3-3C_1}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 4 & 9\\ -2 & 0 & -4 & -9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 4 & 9\end{pmatrix}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Выполнить арифметические действия с матрицами:

1) $3\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & -4\\ 5 & 0\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^T+2\begin{pmatrix}5 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ -8 & 10 & 4\end{pmatrix}^T-3\begin{pmatrix}-5 & -1\\ 8 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 8\\ 3 & 8 & 5\\ 0 & -4 & 7\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2 & 10 & 3\\ 0 & 4 & -2\\ 5 & 2 & -9\end{pmatrix}^T$;

5) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 14\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & -3 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 10\\ 2 & 4 & 8 & -1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3\\ -2\\ -3\\ 1\end{pmatrix}^T$;

7) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Задание 2. Доказать равенство *(AB)C=A(BC)* для матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

Задание 3. Найти: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$.

Практическая работа № 9 «Вычисление определителей. Обратная матрица»

Цель: находить определители матриц.

Теоретические сведения к практической работе

Вычисление определителей. Определитель матрицы *A* размера *2*х*2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *A* размера *3*х*3* (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 4. Найти: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, а затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

Практическая работа № 10,11 «Решение систем линейных уравнений»

Цель: сформировать умение исследовать и использовать различные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Теоретические сведения к практической работе

Рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) произвольной размерности, состоящие из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (*)$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов системы (*), называется матрицей системы (ее размер – mxn), а вектор $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ (m-мерный)- столбцом (вектором) свободных членов. Матрицу вида $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называют расширенной матрицей системы (*).

Любой набор значений неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, образующих n-мерный вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, является решением системы (*), если эти числа удовлетворяют всем уравнениям системы (т.е. превращают их в тождества). Очевидно, что $b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$ при каждом $i=1,2,\ldots,m$ (i-*е* уравнение представляет собой скалярное произведение i-*й* строки матрицы системы на вектор X), и (*) можно переписать в виде

$$AX = B. \qquad (**)$$

Запись (**) называется "матричной (векторной) формой записи" системы (*).

Пример 1. Выписать матрицу коэффициентов и столбец свободных членов для СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$.

Решение. Очевидно, что $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -7 \\ 6 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Записать СЛАУ, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Введем в рассмотрение вектор X и с каждым столбцом мысленно сопоставим неизвестное: с первым столбцом - x_1, со вторым - x_2, с третьим - x_3, с четвертым - x_4. Окончательно нужная система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + 7x_2 + 8x_4 = -4 \\ -2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}.$$

Классификация систем линейных алгебраических уравнений. Определения и основные теоремы. Если СЛАУ (*) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной* (соответственно, система *несовместная*, если она вообще не имеет решений). Совместная система (*) называется *определенной,* если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если имеет более одного решения (в последнем случае у нее бесконечно много решений).

Матрицу системы (*) будем называть *приведенной* (а саму систему *канонической*), если в каждой *i-й* строке *(i=1,2,...,m)* есть элемент $a_{ij}=1$, а все остальные элементы *j-го* столбца равны нулю. Такие элементы (и соответствующие им неизвестные) будем называть *ведущими,* а оставшиеся неизвестные назовем *свободными*.

Теорема 1 (Кронекера-Капелли). СЛАУ (*) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы совпадает с рангом ее расширенной матрицы, т.е выполняется равенство $r(A)=r(A|B)$.

Для совместной системы число $r=r(A)=r(A|B)$ назовем рангом системы.

Теорема 2 (о количестве решений). Пусть СЛАУ (*) совместна. Если ее ранг равен числу неизвестных ($r=n$), то система является определенной; если ранг системы меньше числа неизвестных ($r<n$), то исходная система – неопределенная.

Неопределенная система, как было отмечено, имеет бесконечное множество решений. Совокупность всех решений называется *общим решением системы.*

Алгоритм метода Гаусса. Цель рассуждений – путем элементарных преобразований свести исходную систему к равносильной, решение которой можно выписать непосредственно. Основными шагами метода Гаусса являются следующие.

I. *Прямой ход.* Выписать расширенную матрицу системы, путем элементарных преобразований свести ее к эквивалентной ступенчатой и определить ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Если они различны, то исходная система несовместна, т.е. не имеет решений. Если $r(A)=r(A|B)$, то переходим к следующему этапу.

II. Сравнить ранг системы и число неизвестных, сделать вывод о количестве решений, учитывая теорему 2.

III. *Обратный ход*. Ступенчатую матрицу преобразовать к эквивалентной ей приведенной. Определить, какие неизвестные являются ведущими, какие – свободными.

IV. Выписать по полученной матрице систему, записать ответ (выразив, в случае неопределенной системы, ведущие элементы через свободные для построения общего решения).

Пример 3. Решить СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$.

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3=C_3-2C_1]{C_2=C_2+4C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ -1 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{C_3=C_3+C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 10 & 0 & 0 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3=C_3/10} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Последняя матрица – ступенчатая. Ведущими неизвестными для нее являются x_2 в первой строке, x_3 во второй и x_1 в третьей. Очевидно, что система совместна и ее ранг равен 3: $r(A|B) = r(A) = 3 = r$. Поскольку число неизвестных также равно 3, исходная система является определенной.

Переходим к проведению преобразований по обратному методу Гаусса (теперь необходимо получать нули НАД ведущими элементами).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1=C_1-2C_3]{C_2=C_2-11C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[C_2=-C_2/6]{C_1=C_1-C_2/6} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Теперь составляем по последней матрице систему $\begin{cases} -x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$ и выписываем значения неизвестных в порядке их номеров: $X=(3;1;1)^T$. Это и есть ответ.

Пример 4. Для СЛАУ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 10x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 16 \end{cases}$ найти общее и два частных решения.

Решение. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатой.

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&3\\6&8&2&5&7\\10&12&3&10&16\end{array}\right)\xrightarrow[C_3=C_3-3C_1]{C_2=C_2-2C_1}\left(\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&3\\0&0&0&1&1\\1&0&0&4&7\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\xrightarrow{C_3\leftrightarrow C_2}\left(\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&3\\1&0&0&4&7\\0&0&0&1&1\end{array}\right).$$

Очевидно, что $r(A|B)=r(A)=3=r$, число неизвестных *n=4* и в соответствии с теоремой 6.2 исходная система является неопределенной. Ведущие неизвестные: x_3 в первой строке, x_1 во второй, x_4 в третьей. Свободное неизвестное - x_2. Обратным ходом преобразуем матрицу к приведенному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&3\\1&0&0&4&7\\0&0&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[C_1=C_1-2C_2]{C_2=C_2-4C_3}\left(\begin{array}{cccc|c}3&4&1&0&1\\1&0&0&0&3\\0&0&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{C_1=C_1-3C_2}\left(\begin{array}{cccc|c}0&4&1&0&-8\\1&0&0&0&3\\0&0&0&1&1\end{array}\right).$$

Выписываем полученную систему и ведущие неизвестные выражаем через свободные: $\begin{cases}4x_2+x_3=-8\\ x_1=3\\ x_4=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_3=-8-4x_2\\ x_1=3\\ x_4=1\end{cases}$. Общее решение записываем в порядке нумерации неизвестных: $X_{об}=(3;\quad x_2;\quad -8-4x_2;\quad 1)^T$, x_2 - любое вещественное число.

Частное решение можно получить, если придать свободному неизвестному x_2 конкретное числовое значение. Например, при $x_2=0$ $X_ч=(3;0;-8;1)^T$, а при $x_2=-1$ $X_ч=(3;-1;-4;1)^T$.

Теорема Крамера. Рассмотрим «квадратную» систему линейных уравнений (число неизвестных совпадает с числом уравнений) вида

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ \quad ...\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}. \qquad (*)$$

Теорема 3 (теорема Крамера). Если определитель матрицы системы (*) отличен от нуля ($|A|\neq 0$), то данная система имеет единственное решение, причем значения неизвестных находятся по формулам

$$x_i=\frac{|A|_i}{|A|},\quad i=1,2,...,n$$

где $|A|_i$- определитель матрицы, полученной из исходной матрицы системы путем замены *i-го* столбца на столбец свободных членов.

Пример 5. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Выписываем A - матрицу системы и B - столбец свободных членов: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$. Далее вычисляем определители:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16-4) - (-1)(12+16) - 1(-6-12) = 60 \neq 0;$$

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-4) - (-1)(44+22) - 1(-22-44) = 180;$$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2(44+22) - 4(12+6) - 1(33-33) = 60;$$

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2(44+22) - (-1)(33-33) + 4(-6-12) = 60.$$

По теореме Крамера $x_1 = \frac{|A|_1}{|A|} = \frac{180}{60} = 3$; $x_2 = \frac{|A|_2}{|A|} = \frac{60}{60} = 1$; $x_3 = \frac{|A|_3}{|A|} = \frac{60}{60} = 1$.

Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2 \cdot 3 - 1 - 1 \equiv 4$, $3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \equiv 11$, $3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \equiv 11$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

Содержание практической работы

Задание 1. По расширенной матрице выписать СЛАУ.

1) $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -2 & 5 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 15 \end{array}\right)$

2) $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -4 & 1 \\ 12 & 0 & 1 & 11 \\ 5 & 4 & 10 & -3 \end{array}\right)$

3) $(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 10 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 4 & -3 \\ -7 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

4) $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 8 & 6 & 8 & 6 \end{array}\right)$

Задание 2. Решить системы уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$

Задание 3. Решить СЛАУ (в случае неопределенной системы выписывать общее и два любых частных решения).

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 6 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + 8x_3 = 20 \end{cases}$

Практическая работа № 12 «Выполнение действий над комплексными числами, заданными в алгебраическом виде»

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с комплексными числами.

Теоретические сведения к практической работе

Комплексное число – это выражение вида

$$z = x + iy, \qquad (1.1)$$

где *x, y* – вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – *мнимая единица*. Первое из вещественных чисел, *x*, называется *вещественной (действительной) частью* комплексного числа (используется обозначение $x = \operatorname{Re} z$); второе, *y*, - *мнимой частью* ($y = \operatorname{Im} z$). Выражение (1.1) называют *алгебраической формой записи комплексного числа*.

Числом, *сопряженным* к $z = x + iy$, называют число вида $\bar{z} = x - iy$. Используя формулу разности квадратов, получаем, что $z\bar{z} = x^2 + y^2$. Можно доказать, что корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два сопряженных комплексных числа.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$.

Решение. Дискриминант данного уравнения: $D = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 18 = 36 - 72 = -36$ меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36}\cdot\sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 6\,i}{2}, \text{ т.е. } x_1 = 3 + 3i; \quad x_2 = 3 - 3i.$$

Справедливы следующие *правила арифметических действий над комплексными числами* $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ (осуществляется сложение или вычитание алгебраических двучленов и приведение подобных);

2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1 y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ (осуществляется перемножение алгебраических двучленов и приведение подобных с учетом того, что $i^2 = -1$);

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ (эта операция возможна только в случае, когда $z_2 \ne 0 + i0 = 0$).

Пример 2. Вычислить $z = \dfrac{2-7i}{3+4i}$ и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

Решение. Действуя в соответствии с правилами получаем:

$$z = \frac{2-7i}{3+4i} = \frac{(2-7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-8i-21i+28i^2}{9-16i^2} = \frac{6-29i-28}{9+16} = \frac{-22-29i}{25} = -\frac{22}{25} - \frac{29}{25}i;$$

поэтому $\operatorname{Re} z = -\dfrac{22}{25}$, $\operatorname{Im} z = -\dfrac{29}{25}$.

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить, выписать вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел.

1) $(2-3i) - (1+i)(2i-1)$ 2) $\dfrac{2+3i}{1-i}$ 3) $6i + \dfrac{1+7i}{2-3i}$

4) $(3+i)\dfrac{1+i}{1-i}$ 5) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^2}{i-\sqrt{3}}$ 6) $(1+2i)^3-3$

7) $(1-i)^2+i^4$

Задание 2. Найти все корни уравнений:

1) $x^2+9=0$; 2) $x^2-3x+10=0$; 4) $x^2-2x+10=0$;

5) $x^2+2x+10=0$; 6) $x^4-16=0$ 7) $x^2+100=0$

Практическая работа № 13 «Перевод комплексных чисел в различные формы»

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с комплексными числами в тригонометрической форме.

Теоретические сведения к практической работе

Тригонометрическая форма комплексного числа. Каждому комплексному числу вида (1.1) можно поставить в соответствие точку *M(x;y)* на декартовой плоскости (при этом на оси *OX* располагаются вещественные числа $z = x + i0 = x$, а на оси *OY* – чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$).

Модулем комплексного числа назовем длину отрезка $|OM|$ (или расстояние от начала координат до точки *M*), т.е. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргументом комплексного числа ($\varphi = \mathrm{Arg} z$) назовем угол, который вектор $\overline{OM}$ образует с положительным направлением оси OX. Главное значение аргумента, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию $0 \le \varphi < 2\pi$. При этом выражение вида

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (1.2)$$

называется *тригонометрической формой записи комплексного числа*.

Преобразуем (1.1)

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = |z|\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

и, сравнивая с (1.2), получаем, что аргумент z можно найти, решив систему

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|} \end{cases} \qquad (1.3.)$$

Пример 3. Записать комплексное число в тригонометрической форме $z = 1 - i\sqrt{3}$, указать модуль и аргумент комплексного числа.

Решение. По определению $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Для определения аргумента воспользуемся формулой: $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Получаем, что $\varphi = \arg z = \dfrac{5\pi}{3}$.

Тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид: $z = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

Возведение в степень и извлечение корней. Если комплексное число задано тригонометрической формой $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то справедлива формула Муавра

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (1.4)$$

Для извлечения корня *n*-й степени (*n* – целое число, большее 1) из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, применяется формула, дающая *n* значений этого корня:

$$z_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,\dots,n-1. \qquad (1.5)$$

Пример 4. Вычислить: a) $(-1+i)^{13}$; b) $\sqrt[3]{-1}$.

Решение. В задании a), чтобы воспользоваться формулой Муавра, необходимо представить комплексное число в тригонометрической форме. Имеем: $|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$; $\cos\varphi=-1/\sqrt{2}$ и $\sin\varphi=1/\sqrt{2}$, т.е. $\varphi=3\pi/4$ (так как соответствующая точка лежит во второй четверти). Следовательно, $-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ и $(-1+i)^{13}=\sqrt{2^{13}}\left(\cos\frac{3\cdot 13\pi}{4}+i\sin\frac{3\cdot 13\pi}{4}\right)$ (в силу (1.4)). Учитывая что $\frac{39\pi}{4}=10\pi-\frac{\pi}{4}$ и используя свойства тригонометрических функций, получаем:

$$(-1+i)^{13}=64\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)=64\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})=64-64i.$$

В задании b) тригонометрическая форма заданного числа имеет вид $-1=\cos\pi+i\sin\pi$ ($|z|=1$), поэтому в силу (1.5)

$$z_k=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3},\ k=0,1,2.$$

Выписываем три искомых корня:

$$z_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_1=\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}=\cos\pi+i\sin\pi=-1;$$

$$z_2=\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Содержание практической работы

Задание 1. Запишите предложенные комплексные числа в тригонометрической форме:

1) $-3i$; 2) $2+i$; 3) $3+3i$; 4) $2-5i$ 5) $7+8i$ 6) $10-5i$ 7) $2-4i$.

Практическая работа № 15,16 «Формула полной вероятности. Формула Бейеса. Повторные и независимые испытания. Простейший поток событий и распределения Пуассона. Дискретная и непрерывная случайные величины. Способ задания дискретной величины. Числовые характеристики дискретной случайной величины»

Цель: сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей.

Теоретические сведения к практической работе

Классическое определение вероятности

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью P(A) события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числуn всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n = 30, m = 30 - 2 = 28$$
$$P = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Аксиомы вероятностей:

Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число P(A), называемое вероятностью события A.

Если события A_1, A_2 … попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю P=0.

Вероятность достоверного события равна единице P=1.

Вероятность произвольного случайного события A заключается между 0 и 1: $0<P(A)<1$.

Пример 2: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

Решение: Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность $p = \frac{11}{34}$

События A и B называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События A и B называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Пример 3: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: Т.к. события совместны, то $p = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 1,5 - 0,56 = 0,94$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: P(A+B)=P(A)+P(B).

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: Р(АВ)=Р(А)·Р(А/В) или Р(ВА)=Р(А)·Р(В/А)

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: Р(АВ)=Р(А)·Р(В).

Пример 4: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

Решение: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки

$n_1 = 10$

$m_1 = 4$

$p_1 = \frac{4}{10}$

$n_2 = 10$

$m_2 = 3$

$p_2 = \frac{3}{10}$

Тогда вероятность того, что обе ручки красные: $p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} = 0{,}12$

Полная вероятность. Формула Байеса

Если событие А может произойти только при выполнении одного из событий H_1, H_2, …, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события А вычисляется по формуле

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3) + \ldots$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и $p(\mathrm{A}) \neq 0$, то выполняется равенство, называемое формулой Байеса:

$$p(\mathrm{H}_i /\, \mathrm{A}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_i) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_i)}{p(\mathrm{A})}$$

Пример 1: В первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

Решение: Пусть событие А – наудачу взятая лампа проработает заданное время.

Тогда, пусть H_1 – лампа из первой партии, H_2 – лампа из второй партии и H_3 – лампа из третьей партии. Тогда событие A/H_1 – лампа из первой партии проработает заданное время, A/H_2 – лампа из второй партии проработает заданное время и A/H_3 – лампа из третьей партии проработает заданное время. Найдем вероятности

$$n=20+30+50=100$$

$$p(\mathrm{H}_1)=\frac{20}{100}=0,2$$

$$p(\mathrm{H}_2)=\frac{30}{100}=0,3$$

$$p(\mathrm{H}_3)=\frac{50}{100}=0,5$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1)=0,7$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2)=0,8$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3)=0,9$$

$$p(\mathrm{A})=\mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot\mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1)+\mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot\mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2)+\mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot\mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3)=$$

$$=0,2\cdot0,7+0,3\cdot0,8+0,5\cdot0,9=0,14+0,24+0,45=0,83$$

Теперь, используя формулу Байеса найдем вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии

$$p(\mathrm{H}_1/\,\mathrm{A})=\frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot\mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1)}{p(\mathrm{A})}=\frac{0,2\cdot0,7}{0,83}\approx0,169$$

Пример 2: Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 5 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Решение: Пусть событие А – извлекается белый шар.

Тогда, пусть H_1 – шар из первой урны, H_2 – шар из второй урны и H_3 – шар из третьей урны. Тогда событие A/H_1 – белый шар из первой урны, A/H_2 – белый шар из второй урны и A/H_3 – белый шар из третьей урны. Найдем вероятности

$$p(\mathrm{H}_1)=\frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{H}_2)=\frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{H}_3)=\frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1)=\frac{5}{12}$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2)=1$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3)=0$$

$$p(\mathrm{A})=\mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot\mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1)+\mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot\mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2)+\mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot\mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\cdot1+\frac{1}{3}\cdot0=\frac{5}{36}+\frac{1}{3}=\frac{17}{36}$$

Формула Бернулли

1) Вероятность того, что событие А наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли $P_n(\mathrm{m})=\mathrm{C}_n^m\,p^m(1-p)^{n-m},m=0,1,2,...,n$

Пример 1: Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

Решение:

$$p=0,2$$

$$n=6$$

$$m=2$$

$$P_n(\mathrm{m})=\mathrm{C}_n^m\,p^m(1-p)^{n-m}=\mathrm{C}_6^2\,0,2^2(1-0,2)^{6-2}=\frac{6!}{4!\cdot2!}\cdot0,04\cdot0,8^4\approx0,246$$

2) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна $P_n(\mathrm{m} \geq 1) = 1 - \mathrm{q}^n, q = 1 - p$

Пример 2: Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

Решение:

$$p = 0,6 \Rightarrow \quad q = 0,4$$
$$n = 6$$
$$m \geq 1$$
$$P_6(\mathrm{m} \geq 1) = 1 - 0,4^6 \approx 0,9959$$

3) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m_1 и не более m_2 раз вычисляется по формуле $P_n(\mathrm{m}_1 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{m}_2) = \sum_{m_1}^{m_2} P_n(\mathrm{m})$

Пример 3: Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

Решение:

$$p = 0,7$$
$$n = 5$$
$$2 \leq m \leq 4$$
$$P_5(2 \leq m \leq 4) = \mathrm{C}_5^2 \cdot 0,7^2 (1 - 0,7)^{5-2} + \mathrm{C}_5^3 \cdot 0,7^3 (1 - 0,7)^{5-3} + \mathrm{C}_5^4 \cdot 0,7^4 (1 - 0,7)^{5-4} \approx 0,801$$

4) Наивероятнейшее значение m_0 числа наступления события А при проведении n повторных независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле
$$np - q \leq m_0 \leq np + p$$
$$np - (1 - p) \leq m_0 \leq np + p$$

Пример 4: Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в партии.

Решение:

$$p = 0,05$$
$$n = 50$$
$$m_0 - ?$$
$$q = 1 - p = 1 - 0,05 = 0,95$$
$$50 \cdot 0,05 - 0,95 \leq m_0 \leq 50 \cdot 0,05 + 0,05$$
$$1,55 \leq m_0 \leq 2,55$$
$$m_0 = 2$$

Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики

Случайная величина X – это числовая функция $X = f(\omega_i)$, определенная на пространстве элементарных событий. Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются дискретными. Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности.

Соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называют распределением вероятностей случайной величины. Для дискретной случайной величины это соответствие может быть записано в виде таблицы: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины Х называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности $M(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

Дисперсией дискретной случайной величины Х называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(\mathrm{X}) = M(\mathrm{X} - M(\mathrm{X}))^2$. Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:

$$D(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m\right)^2 p_i$$

$$D(\mathrm{X}) = M(\mathrm{X}^2) - (M(\mathrm{X}))^2$$

Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{D(\mathrm{X})}$.

Если случайная величина Х имеет биномиальное распределение вероятностей, то

$$M(\mathrm{X}) = \mathrm{np} \quad D(\mathrm{X}) = \mathrm{npq}$$

Пример 1: Случайная величина Х задана таблицей распределения вероятностей. Найти M(X), D(X), σ(X).

x_i	2	5	8	9
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Решение:

$$M(\mathrm{X}) = 2 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}4 + 8 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 + 2 + 2{,}4 + 1{,}8 = 6{,}4$$

$$M(\mathrm{X}^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}4 + 64 \cdot 0{,}3 + 81 \cdot 0{,}2 = 45{,}8$$

$$D(\mathrm{X}) = 45{,}8 - 6{,}4^2 = 4{,}84$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(\mathrm{X})} = \sqrt{4{,}84} = 2{,}2$$

Пример 2: Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

Решение:

$$M(\mathrm{X}) = 100 \cdot 0{,}05 = 5$$

$$D(\mathrm{X}) = 100 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 4{,}75$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(\mathrm{X})} = \sqrt{4{,}75} = 2{,}18$$

Содержание практической работы

Задание 1. Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

5. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе - 0,7, в третье - 0,85. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

6. В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными? Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

7. В партии из 25 деталей находятся 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

8. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события А того, что выпадет хотя бы одна шестерка.

9. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.

10. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

Задание 2. Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующие задачи:

1. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 2 урны?

2. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру =0,5, ко второму =0,6. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером =0,94, а вторым =0,92. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная равна 0,9, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартная.

4. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 6 синих и 4 черных шаров, во второй – только синие и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар синий?

5. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 1 урны?

Задание 3. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.

3. Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время Т равна 0,5. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время Т прибор будет работать безотказно?

4. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету =0,3. Какова вероятность того, что из семи приобретенных билетов три билета окажутся выигрышными?

5. Магазин получил 40 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,04. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

6. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найдя вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных, найти наивероятнейшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных, указав его вероятность.

7. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10?

8. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек =0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке?

9. На самолете имеются 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна p. Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном двигателе.

10. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

11. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи перерасхода электроэнергии не будет?

Задание 4. Найти числовые характеристики дискретных случайных величин:

1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

2. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

3. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

4.Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

5. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины X – числа появления события в этих испытаниях.

4. Контрольно-оценочные материалы для итоговой аттестации по учебной дисциплине

В результате аттестации по учебной дисциплине осуществляется комплексная проверка следующих умений и знаний, а также динамика формирования общих компетенций.

Оценка освоения учебной дисциплины осуществляется с использованием следующих форм и методов: фронтальный и индивидуальный опрос во время аудиторных занятий; контрольные и тестовые задания по темам учебной дисциплины; проведение практических работ.

Основные источники:

1. Григорьев С.Г. Математика: учебник для студентов сред. проф. учреждений / С.Г. Григорьев, С.В. Задулина; под ред. В.А. Гусева. – 4-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 384 с.
2. Григорьев С.Г. Элементы высшей математики: учебник для студентов учреждений сред. проф. Образования / С.Г. Григорьев, Ю.А. Дубинский. – 5-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 320 с.
3. Пехлецкий И.Д. Математика: учебник для студентов образовательных учреждений сред. проф. учреждений / И.Д. Пехлецкий. – 5-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 304 с.
4. Письменный Д.Т. конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч 1./ Дмитрий Письменный-14-е изд.-М.: Айрис-пресс, 2015.-288 с.: ил. – (Высшее образование).
5. Письменный Д.Т. конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч 2./ Дмитрий Письменный-11-е изд.-М.: Айрис-пресс, 2015.-256 с.: ил. – (Высшее образование).
6. Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. М.: Академия, 2016
7. Математика: учебник [Электронный ресурс]/ М.И. Башмаков. — Москва:КноРус, 2019. — 394 с. — Режим доступа: https://www.book.ru/book/919991

Дополнительные источники:

1. http://www.youtube.com/watch?v=1546Q24djU4&feature=channel (Основные сведения о рациональных функциях)
2. http://www.youtube.com/watch?v=TxFmRLiSpKo (Геометрический смысл производной)
3. http://www.youtube.com/watch?v=PbbyP8oEv-g (Первообразная и неопределенный интеграл)
4. http://www.youtube.com/watch?v=2N-1jQ_T798&feature=channel (Интегрирование по частям)
5. http://www.youtube.com/watch?v=3qGZQW36M8k&feature=channel (Таблица основных интегралов)
6. http://www.youtube.com/watch?v=7lezxG4ATcA&feature=channel (Непосредственное интегрирование)
7. http://www.youtube.com/watch?v=s-FDv3K1KHU&feature=channel (Метод подстановки).
8. Контрольная работа РУ: решение задач онлайн [Электронный ресурс] // Режим доступа:https://www.kontrolnaya-rabota.ru/s/
9. http://festival.1september.ru/
10. http://www.fepo.ru
11. www.mathematics.ru